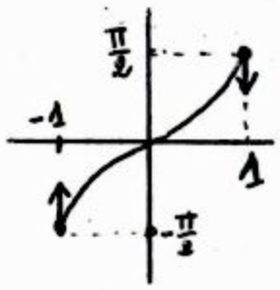
Fonctions usuelles

1/ Arcsin :



- Arcsin est définie, continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et : $\forall x \in]-1,1[: (\text{Arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Arcsin est définie par : $\begin{cases} y = \text{Arcsin}x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$
- Arcsin est une fonction impaire, strictement croissante sur $[-1,1]$

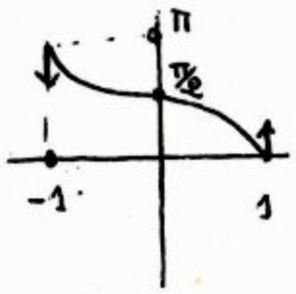
càd • $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}x$; • $x \leq y \Leftrightarrow \text{Arcsin}x \leq \text{Arcsin}y$

• $\forall (x,y) \in [-1,1]$: $x = y \Leftrightarrow \text{Arcsin}x = \text{Arcsin}y$

- $\forall x \in [-1,1] : \sin(\text{Arcsin}x) = x$
- $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2] : \text{Arcsin}(\sin x) = x$
- $\forall x \in [-1,1] : -\pi/2 \leq \text{Arcsin}x \leq \pi/2$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{Arccos}x$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

2/ Arccos :



- Arccos est définie, continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[: (\text{Arccos}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Arcsin est définie par : $\begin{cases} y = \text{Arccos}x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$
- Arccos est une fonction décroissante sur $[-1,1]$

$x \leq y \Leftrightarrow \text{Arccos}x \leq \text{Arccos}y$

$x = y \Leftrightarrow \text{Arccos}x = \text{Arccos}y$

$\forall x \in [-1,1] : \cos(\text{Arccos}x) = x$

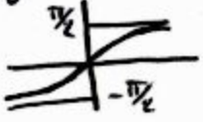
$\forall x \in [0,\pi] : \text{Arccos}(\cos x) = x$

$\forall x \in [-1,1] : 0 \leq \text{Arccos}x \leq \pi$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan}x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

3/ Arctan

- Arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : (\text{Arctan}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- Arctan est impaire, croissante, bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2, \pi/2[$
- $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}x$; $x \leq y \Leftrightarrow \text{Arctan}x \leq \text{Arctan}y$; $x = y \Leftrightarrow \text{Arctan}x = \text{Arctan}y$
- $\forall x \in \mathbb{R} : -\pi/2 < \text{Arctan}x < \pi/2$; $\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\text{Arctan}x) = x$
- $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[: \tan(\text{Arctan}x) = x$



4/ Dérivées des fonctions Arcsin, Arccos, Arctan composée avec 1 fonction

- Si u est dérivable sur I et si $\forall x \in I : -1 < u(x) < 1$ alors $\text{Arcsin}u$ et $\text{Arccos}u$ sont dérivables sur I et $(\text{Arcsin}u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ et $(\text{Arccos}u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- Si u est dérivable sur I alors $\text{Arctan}u$ est dérivable sur u et $(\text{Arctan}u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

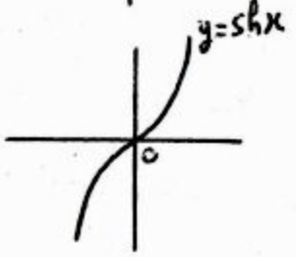
1/ Fonctions hyperboliques directes

a/ fonction cosinus hyperbolique : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

b/ " sinus " " : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

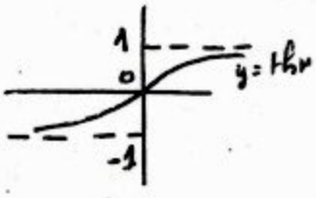
c/ " tangente " " : $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

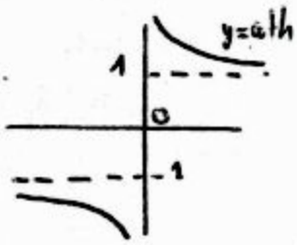
d/ " cotangente " " : $\coth x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$



Propriétés :

- $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$; $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}a \operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b$
- $\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}a \operatorname{ch}b - \operatorname{sh}a \operatorname{sh}b$
- $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}a \operatorname{ch}b + \operatorname{sh}b \operatorname{ch}a$
- $\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}a \operatorname{ch}b - \operatorname{sh}b \operatorname{ch}a$
- $\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}b}{1 + \operatorname{th}a \cdot \operatorname{th}b}$; $\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}a - \operatorname{th}b}{1 - \operatorname{th}a \cdot \operatorname{th}b}$



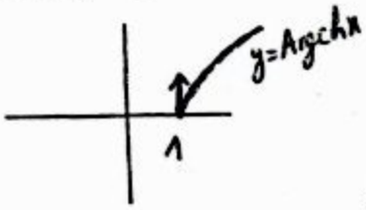


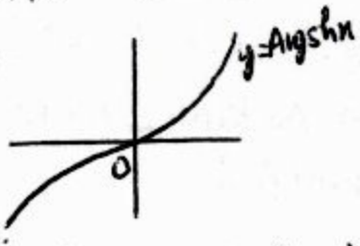
- $\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$; $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh}a \operatorname{ch}a$; $\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th}a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$
- $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$; $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$

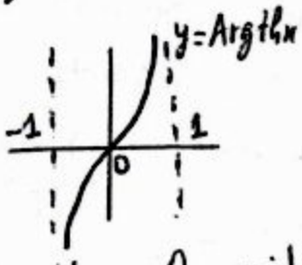
2/ Fonctions hyperboliques réciproques

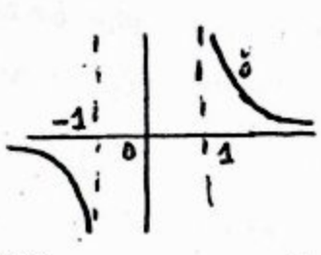
a/ Définitions : Les fonctions ch, sh, th sont continues et strictement croissantes respectivement sur les intervalles $[0,+\infty[$; $]-\infty,+\infty[$; $]-\infty,+\infty[$ donc elles sont bijectives de ces intervalles respectivement vers $[1,+\infty[$; $]-\infty,+\infty[$; $]-1,1[$ et admettent des fonctions réciproques, notées Argch, Argsh et Argth définies par

$\begin{cases} y = \operatorname{Argch} x \\ x \in [1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ y \in [0,+\infty[\end{cases}$; $\begin{cases} y = \operatorname{Argsh} x \\ x \in]-\infty,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{sh} y \\ y \in]-\infty,+\infty[\end{cases}$; $\begin{cases} y = \operatorname{Argth} x \\ x \in]-1,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{th} y \\ y \in]-\infty,+\infty[\end{cases}$









b/ Expression de ces fonctions en fonction d'un logarithme

$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$; $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$; $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

c/ Dérivée

$(\operatorname{Argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$; $(\operatorname{Argsh} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}}$

$(\operatorname{Argch} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$ $(\operatorname{Argth} u)' = \frac{u'}{1 - u^2}$

I/ Developpement limité des fonctions usuelles au V de 0

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
- $a^x = e^{x \ln a} = 1 + x\ln a + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{x^n (\ln a)^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \cdot \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Cas particulier : * $\alpha = \frac{1}{2}$; $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1.3.5.\dots.(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)} x^n + x^n \varepsilon(x)$

* $\alpha = -1$ $\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$

* $x \longrightarrow -x$ $\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$

II/ Operations sur les D.L :

Exemples : 1/ Déterminer DLn de sh x et ch x (Somme)

2/ Produit : a/ Déterminer DL_4 de $\frac{e^x}{1-x}$ au voisinage de 0

b/ Déterminer DL_4 de $\sin^2 x$ au voisinage de 0

3/ Quotient :

a/ Déterminer DL_5 de $\tan x$ au voisinage de 0

b/ " DL_4 de $x \cot an x$ " "

4/ Fonction composée

a/ Déterminer DL_4 de $h(x) = e^{1-\cos x}$ au voisinage de 0

b/ " DL_4 de $f(x) = \sqrt{\cos x}$

c/ " DL_4 de $g(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

ETUDUP .com

5/ Primitive et Dérivation

Th1: f fonction réelle définie dans l'intervalle I contenant 0 et F la primitive de f telle que $F(0)=0$
si f admet un DL_n au voisinage de 0 alors F admet un DL_{n+1} qui est la primitive de DL de f nulle en 0

Th2: Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert contenant 0 dont la dérivée admet un DL_n au voisinage de 0 Alors :
(i) f admet un DL_{n+1} au voisinage de 0
(ii) le DL de f' est la dérivée de DL de f.

Exemples
a/ Déterminer DL_n de $f(x)=\ln(1+x)$ au voisinage de 0
b/ Déterminer DL_{2n} de $f(x)=\text{Arctan } x$ " "
c/ " DL_3 de $\text{Arcsin}x$, $\text{Arccos}x$, $\frac{1}{(1+x)^2}$ au voi. de 0

III/ D.L au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$

1/ Déf: Soit f une fonction définie ds 1 intervalle ouvert contenant x_0, f admet un DL_n au voisinage de x_0 ; S'il existe des constantes réelles $a_0, a_1, \dots, a_n$ /

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

Remarque en posant $h=x-x_0$, on se ramène à un DL au $V(0)$

Exemple Déterminer le DL_3 au voisinage de 1 de $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

2/ Cas où $x_0=\pm\infty$: On se ramène à un DL en 0 en posant $h=\frac{1}{x}$

Exemple : $f(x)=\frac{xe^{1/x}}{x-1}$

$x=1+h^2$ $\sqrt{1+h^2}=$

ETUDUP .com

b/ Changement de variables : $\int_a^b u(v(x))\,v'(x)\,dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(t)\,dt$

ETUDUP .com

c/ Integration d'une fonction rationnelle

c1 : Les primitives de $f(x) = \frac{1}{ax+b}$: $F(x) = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

c2 : Les primitives de $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$: On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta > 0$: $f(x) = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ ⟶ ln

si $\Delta = 0$: $f(x) = \frac{1}{a(x-x_1)^2}$ ⟶ on utilise $u'u^n$

si $\Delta < 0$: $f(x) = \frac{1}{a(x-x_1)^2+\delta^2}$ ⟶ $\frac{1}{x^2+a^2}$ ⟶ Arctan

c3/ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ P et Q sont de polynômes

P	Q
R	Q_1

- Si $d^\circ P \geq d^\circ Q$ alors on divise P par Q et $f(x) = Q_1 + \frac{R}{Q}$ avec $d^\circ R < d^\circ Q$
- Si $d^\circ P < d^\circ Q$ alors on factorize Q le maximum possible comme produit de polynomes du 1° degré et de polynômes du 2° degré dont le discriminant $\Delta < 0$, puis on decompose $f(x)$ en elements simples sous la forme $f(x) = \sum \frac{a_i}{(x-x_i)^{m_i}} + \sum \frac{b_i x + c_i}{(d_i x^2 + e_i x + f_i)^{m_i}}$ dont $\Delta < 0$

d/ $f(x) = f(\cos x, \sin x)$ fonction polynôme en $\sin x$ et $\cos x$

Calcul de primitive de $g(x) = \sin^p x \cos^q x$

- Si p ou q est impair alors on pose $u = \cos x$ ou $u = \sin x$
- Si p et q sont pairs alors on linearize g, avec les formules $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ou avec les formules $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

e/ Si f est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$:

On pose : $u = \tan\frac{x}{2}$ et $du = \frac{1}{2}(1+u^2)\,dx$; $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$; $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$

f/ Si f est une fonction rationnelle en $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}x$; e^x :

On pose $u = e^x$ ou $u = \mathrm{th}\frac{x}{2}$; $du = \frac{1}{2}(1-u^2)\,dx$; $\mathrm{sh}x = \frac{2u}{1-u^2}$; $\mathrm{ch}u = \frac{1+u^2}{1-u^2}$; $\mathrm{th}x = \frac{2u}{1+u^2}$

g/ Si f est une fonction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$: on pose $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

h/ Si f est une fonction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $a \neq 0$

On ecrit : $ax^2+bx+c = a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - k\right)$ avec $k = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Si $k \neq 0$ on pose $t = \frac{1}{\sqrt{|k|}}(x+\frac{b}{2a})$

et on obtient une fonction rationnelle en t et $\sqrt{t^2-1}$ ou $\sqrt{1-t^2}$ ou $\sqrt{1+t^2}$ puis on pose :

$t = \mathrm{ch}u$; ($t = \sin u$ ou $t = \cos u$) ; ($t = \mathrm{sh}u$ ou $t = \tan u$)

ETUDUP .com

1/ Primitive :

- F est une primitive de f sur I si F est derivable sur I et $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$

On note $F(x) = \int f(x)\,dx$

- Si F est une primitive de f alors $F+k$, $k \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f
- Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I
- f est dite integrable sur $I=[a,b]$ si $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ (existe)

2/ Propriétés des fonctions bornées integrables sur un segment [a,b]

- $\int_a^b f+g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$, $\int_a^b kf\,dx = k\int_a^b f\,dx$, $\int_a^a f\,dx = 0$
- $\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$, $\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$
- Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$. si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $f(x)\,dx \geq 0$
- Formule de la moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ moyenne de f sur $[a,b]$

Theoreme : Si f est continue sur $[a,b]$ alors $\exists c \in [a,b]$: $f(c) = \mu$

- Valeur moyenne : Les suites de terme général : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ sont convergentes vers la valeur $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

En particulier : Les suites $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ convergent vers $\int_0^1 f(x)\,dx$

3/ Fonction de variable reelle définie par une integrale

Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$. Soit $c \in [a,b]$

Posons $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

a/ Continuité de F : F est continue sur $[a,b]$

b/ Derivabilité de F : Si f est continue sur $[a,b]$ alors F est derivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$: $F'(x) = f(x)$

Conséquence : Si f est continue sur $[a,b]$ alors l'unique fonction primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annulle en c est $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

4/ Methode de Calcul d'une intégrale

a/ Intégration par parties : $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$

choix de $u(x)$ et $v'(x)$: A L P E S

$u(x) \leftrightarrow v'(x)$: Arcsin, Arccos, Arctan ↓ ln ↓ polynôme ↓ e^x ↓ sin, cos, ch, sh, th

et encore plus..